EL TEOREMA DEL CAMINO MINIMO EN CARACTERISTICA p

por

CONCEPCION ROMO SANTOS
Departamento de Algebra y Fundamentos de la Facultad de Matemáticas
de la Universidad Complutense de Madrid

Introducción

En [8], capítulo III, se demostró que si H es una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cualquiera, es posible disminuir la multiplicidad de la hipersuperficie mediante una transformación cuadrática formal cuando su forma inicial no sea potencia de una forma lineal y mediante un número finito de transformaciones cuadráticas formales cuando su forma inicial sea potencia de una forma lineal.

El objetivo de este trabajo será calcular este número finito y demostrar el siguiente teorema:

Teorema del camino mínimo.—Sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cualquiera. Sea

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^\nu + \varphi_1(W_1, \ldots, W_{n-1}) Z^{\nu-1} + \ldots + \\ + \varphi_{\nu-1}(W_1, \ldots, W_{n-1}) Z + \varphi_\nu(W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0, \\ \nu_0(\varphi_i(W_1, \ldots, W_{n-1})) \geq i$$

una ecuación de la hipersuperficie H cuya forma inicial es potencia de una forma lineal. Se verifica entonces que el mínimo número de transformaciones cuadráticas que hay que aplicar a H para disminuir su multiplicidad es igual a la parte entera del primer exponente característico del diagrama de Newton de H.

NOTA 1.—i) Llamaremos variedad algebroide sumergida en K^n a

$$V(I) = \operatorname{Spec}(K[[W_0, \ldots, W_{n-1}]]/I),$$

con $K[[W_0, \ldots, W_{n-1}]]$ el anillo de series de potencias formales en n indeterminadas sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado y de característica cualquiera e I un radical de $K[[W_0, \ldots, W_{n-1}]]$. (Véase [8], def. 1-4-1.)

Llamaremos hipersuperficie algebroide a toda variedad algebroide de dimensión $n-1$ y dimensión de inmersión n. Se verifica que si $H = \operatorname{Spec}(\square)$ es una hipersuperficie algebroide,

$$\square = K[[W_0, \ldots, W_{n-1}]]/I$$

con I principal, es decir

$$I = f(W_0, \ldots, W_{n-1})\, K[[W_0, \ldots, W_{n-1}]]$$

y f recibirá el nombre de ecuación de $\square$.

El teorema preparatorio de Weierstrass permite escribir la ecuación de la hipersuperficie H en la forma

$$\begin{gathered} f(W_0, \ldots, W_{n-1}) = W_0^{\nu} + \varphi_1(W_1, \ldots, W_{n-1})\, W_0^{\nu-1} + \ldots + \\ + \varphi_{\nu-1}(W_1, \ldots, W_{n-1})\, W_0 + \varphi_{\nu}(W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0, \\ \varphi_i(W_1, \ldots, W_{n-1}) \in K[[W_1, \ldots, W_{n-1}]],\ \nu_0(\varphi_i) \geq i \end{gathered}$$

En general, supondremos siempre la hipersuperficie preparada de esta forma y llamaremos Z a la variable W_0 elegida en la preparación.

También podemos escribir la ecuación de la hipersuperficie en la forma

$$\begin{gathered} f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = f_{\nu}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) + \\ + f_{\nu+1}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) + \ldots, \end{gathered}$$

donde

$$f_{\nu+i}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}), \quad i \geq 1$$

es o bien cero o una forma de grado $\nu + i$.

Hemos visto en [8], capítulo III, que es posible bajar la multiplicidad de la hipersuperficie mediante una transformación cuadrática formal cuando

$$f_\nu(Z, W_1, \ldots, W_{n-1})$$

no sea potencia de una forma lineal y mediante un número finito de transformaciones cuadráticas formales cuando

$$f_\nu(Z, W_1, \ldots, W_{n-1})$$

sea potencia de una forma lineal.

El objetivo de este artículo es demostrar un teorema que nos permitirá saber el número de transformaciones cuadráticas formales necesarias para que baje la multiplicidad en el caso de que la forma inicial

$$f_\nu(Z, W_1, \ldots, W_{n-1})$$

sea potencia de una forma lineal. Para demostrarlo, en general tendremos que estudiar por separado los tres casos siguientes:

1) La multiplicidad de la hipersuperficie H no es múltiplo de la característica del cuerpo K.

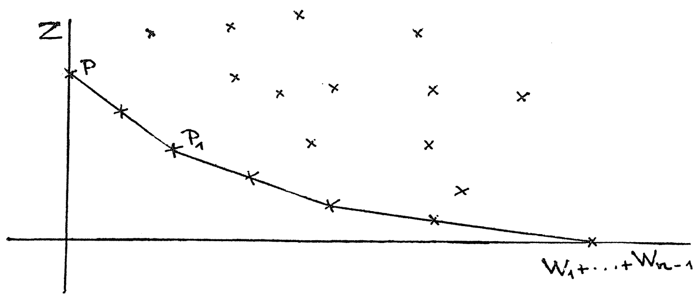
2) $\nu = p^m \cdot l$, $m \geqslant 1$, $l \neq 1$, siendo ν la multiplicidad de H y p la característica de K.

3) $\nu = p^m$, $m \geqslant 1$.

ii) Construiremos ahora el diagrama de Newton de

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0,$$

ecuación de la hipersuperficie H. Como hemos preparado la forma f sabemos que en dicho diagrama de Newton existe un punto P de coordenadas $(0, \nu)$.



Si consideramos las rectas de ecuaciones

$$(1/\delta)\,x + y = \nu, \quad \delta \geq 1,$$

estas rectas unen el punto P con otros puntos del diagrama, de entre ellas escogemos la recta cuyo δ sea menor, sea por ejemplo δ_1 este número y sea P_1 el punto del diagrama de Newton perteneciente a la recta r_{δ_1} de ecuación

$$(1/\delta_1)\,x + y = \nu$$

cuya segunda coordenada sea menor que la segunda coordenada de los restantes puntos del diagrama de Newton situados en r_{δ_1}. Entonces el segmento P P_1 es el primer segmento de la poligonal de Newton y llamaremos primer exponente característico del diagrama al número δ_1. Véase la construcción del diagrama de Newton de una hipersuperficie en [8], 1-3-18.

Vamos a demostrar el teorema del camino mínimo que nos permitirá relacionar δ_1 con el número de transformaciones cuadráticas formales necesarias para que disminuya la multiplicidad en el caso de que la forma inicial

$$f_\nu(Z, W_1, \ldots, W_{n-1})$$

sea potencia de una forma lineal. Demostraremos antes unos lemas previos al teorema.

Lema 2.—Sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n de ecuación

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z_\nu + f_{\nu+1}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) + \ldots = 0.$$

Se verifica que la condición necesaria y suficiente para que la multiplicidad de la hipersuperficie disminuya mediante la aplicación de una única transformación cuadrática es que exista un entero q, $0 < q < \nu$ tal que

$$0 \neq f_{\nu+q} = \alpha_q Z^b W_1^{a_1} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1}} + \ldots, \alpha_q \in K, \alpha_q \neq 0$$

y

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} > 2q,$$

Demostración.—Supongamos en primer lugar que existe un entero q, $0 < q < \nu$, tal que

$$0 \neq f_{\nu+q} = \alpha_q Z^b W_1^{a_1} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1}} + \ldots,$$

con

$$\alpha_q \in K, \alpha_q \neq 0, \; a_1 + \ldots + a_{n-1} + b = \nu + q \; \text{ y } \; a_1 + \ldots + a_{n-1} > 2q.$$

Despejando se tiene $b < \nu - q$.

Los puntos que anulan la forma inicial de la hipersuperficie son los de coordenadas $(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, luego las transformaciones cuadráticas posibles que podemos aplicar a dicha hipersuperficie serán las de ecuaciones

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 Z' \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-1} &= W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{aligned}$$

pudiendo elegir todas las α_i distintas de cero (véase [8], 2-6). La ecuación de la hipersuperficie transformada mediante una transformación de este tipo será:

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) = Z'^{\nu} + \alpha_q . W_1'^{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b - \nu} \cdot \\ \cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{a_2} \ldots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1}} \cdot Z^b + \ldots \end{aligned}$$

siendo su multiplicidad

$$\begin{aligned} \nu' \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b - \nu + b = \\ = \nu + q - \nu + b = q + b < q + \nu - q = \nu \end{aligned}$$

luego $\nu' < \nu$.

Recíprocamente sea $f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$ la ecuación de una hipersuperficie cuya multiplicidad desciende mediante la aplicación de una transformación cuadrática. Se verifica entonces que tiene que existir un entero q, $0 < q < \nu$ tal que $f_{\nu+q} \neq 0$ ya que si no existiera f sería de la forma

$$\begin{aligned} f &= Z^\nu + f_{2\nu}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) + \ldots = \\ &= Z^\nu + \beta W_1^{c_1} \ldots W_{n-1}^{c_{n-1}} Z^d + \ldots \end{aligned}$$

de manera que el grado de los términos de f distintos de Z^ν es mayor o igual que 2ν. Así

$$c_1 + \ldots + c_{n-1} + d \geq 2\nu.$$

Entonces si aplicamos a la hipersuperficie la transformación cuadrática de ecuaciones

$$\begin{aligned} Z &= W'_1 Z' \\ W_1 &= W'_1 \\ W_2 &= W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-1} &= W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{aligned}$$

se transformará en la hipersuperficie de ecuación

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) &= Z'^\nu + \beta W_1'^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + d - \nu} \cdot \\ &\cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{c_2} \ldots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{c_n} \cdot Z'^d + \ldots \end{aligned}$$

de multiplicidad $\nu' = \nu$ ya que

$$c_1 + \ldots + c_{n-1} + d - \nu + d \geq \nu + d.$$

Luego f es de la forma

$$\begin{aligned} f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) &= Z^\nu + f_{\nu+q}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) + \ldots = \\ &= Z^\nu + \alpha_q W_1^{a_1} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1}} \cdot Z^b + \ldots, \; 0 < q < \nu, \; \alpha_q \neq 0 \end{aligned}$$

y para que la multiplicidad de la transformada de f mediante una transformación cuadrática sea menor que ν tiene que verificarse

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b - \nu + b = \nu + q - \nu + b < \nu,$$

es decir $b < \nu - q$, o lo que es lo mismo $a_1 + \ldots + a_{n-1} > 2q$, q. e. d.

LEMA 3.—La multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

no disminuye mediante la aplicación de dos transformaciones cuadráticas formales si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

i) Para todo entero q, $0 < q < \nu$ tal que existe un término

$$\alpha_q W_1^{a_1} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1}} \cdot Z^b \in f_{\nu+q}$$

con $\alpha_q \in K$, $\alpha_q \neq 0$, entonces

$$2(a_1 + \ldots + a_{n-1}) \leq 3q.$$

ii) Para todo entero r, $0 \leqslant r < \nu$ tal que existe un término

$$\alpha_r W_1^{r_1} \ldots W_{n-1}^{r_{n-1}} \cdot Z^d \in f_{2\nu+r}, \alpha_r \neq 0,$$

entonces

$$2(r_1 + \ldots + r_{n-1}) \leq 3\nu + 3r.$$

DEMOSTRACIÓN.—Si la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación

$$f(Z, W_1 \ldots, W_{n-1}) = 0$$

no disminuye mediante la aplicación de dos transformaciones cuadráticas formales, se verifican las propiedades i), ii) ya que si i) no se verificara, es decir existiera un término de la forma

$$\alpha_q W_1^{a_1} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1}} \cdot Z^b \in f_{\nu+q}$$

con $0 < q < \nu$,

$$2(a_1 + \ldots + a_{n-1}) > 3q \quad \text{y} \quad \alpha_q \neq 0,$$

se tendría que aplicando dos veces a la hipersuperficie la transformación cuadrática de ecuaciones

$$\begin{cases} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \qquad \alpha_i \neq 0, \quad i = 1 \ldots n-1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-1} = W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{cases}$$

Las ecuaciones de las dos transformadas cuadráticas serían:

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) &= Z'^{\nu} + \alpha_q W_1'^{a_1 + \ldots + a_{n-1} + b - \nu} \cdot \\ &\cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{a_2} \ldots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1}} \cdot Z'^b + \ldots = \\ &= Z'^{\nu} + \alpha_q (\alpha_2/\alpha_1)^{a_2} \ldots (\alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1}} \cdot \\ &\cdot W_1'^{a_1 + \ldots + a_{n-1} + b - \nu} \cdot Z'^b + \ldots = Z'^{\nu} + \\ &+ \alpha'_q W_1'^{a_1 + \ldots + a_{n-1} + b - \nu} \cdot Z'^b + \ldots = 0 \end{aligned}$$

con

$$\alpha'_q = \alpha_q (\alpha_2/\alpha_1)^{a_2} \ldots (\alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1}}; \quad \alpha'_q \neq 0$$

$$f''(Z'', W''_1, \ldots, W''_{n-1}) = Z''^{\nu} + \alpha'_q W_1''^{a_1 + \ldots + a_{n-1} + 2b - 2\nu} Z''^b + \ldots = 0$$

Si llamamos ν'' a la multiplicidad de f''

$$\begin{aligned} \nu'' = a_1 + \ldots + a_{n-1} + 2b - 2\nu + b = \nu + q + 2b - 2\nu < \\ < 2\nu - q + q - \nu = \nu \end{aligned}$$

pues

$$2b = 2(\nu + q) - 2(a_1 + \ldots + a_{n-1}) < 2\nu - q,$$

con lo que $\nu'' < \nu$ y queda demostrado que si una hipersuperficie no verifica la condición i) es posible disminuir su multiplicidad mediante dos transformaciones cuadráticas.

De la misma manera supongamos ahora que la hipersuperficie de ecuación

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

no verifique la condición ii), es decir

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^{\nu} + \alpha_r W_1^{r_1} \ldots W_{n-1}^{r_{n-1}} Z^d + \ldots,$$

con

$$\alpha_r \in K, \quad \alpha_r \neq 0, \quad 0 \leq r < \nu, \quad r_1 + \dots + r_{n-1} + d = 2\nu + r,$$
$$2(r_1 + \dots + r_{n-1}) > 3\nu + 3r,$$

luego

$$2d = 4\nu + 2r - 2(r_1 + \dots + r_{n-1}) < \nu - r.$$

Aplicando la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$\begin{cases} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \qquad \alpha_i \neq 0,\, 1 \leq i \leq n-1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ W_{n-1} = W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{cases}$$

la ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = Z'^{\nu} + \alpha_r W_1'^{r_1 + \dots + r_{n-1} + d - \nu} \cdot$$
$$\cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{r_2} \dots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{r_{n-1}} \cdot Z'^d + \dots =$$
$$= Z'^{\nu} + \alpha'_r W_1'^{r_1 + \dots + r_{n-1} + d - \nu} \cdot Z'^d + \dots = 0$$

Si llamamos ν' a la multiplicidad de

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = 0,$$

tendremos

$$\nu' = r_1 + \dots + r_{n-1} + d - \nu + d = \nu + r + d,$$

es decir $\nu'' \geqslant \nu$, luego la multiplicidad de

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

es imposible bajarla mediante una transformación cuadrática. Para calcular el número de transformaciones es necesario distinguir varios casos:

1.er caso. Uno de los dos números r o d es distinto de cero. En este caso si aplicamos otra vez la misma transformación cuadrática la hipersuperficie transformada será

$$f''(Z'', W''_1, \ldots, W''_{n-1}) = Z''^{\nu} + \alpha'_r W_1''^{r_1 + \cdots + r_{n-1} + 2d - 2\nu} \cdot Z''^{a} + \ldots$$

y si ν'' es la multiplicidad de $f''(Z'', W_1'', \ldots, W''_{n-1}) = 0$,

$$\nu'' = r_1 + \ldots + r_{n-1} + 3d - 2\nu = 2\nu + r + 2d - 2\nu < \\ < r + \nu - r = \nu,$$

luego $\nu'' < \nu$ y también hemos podido bajar la multiplicidad de f en dos transformaciones cuadráticas y no en una.

2.° caso. $r = 0$, $d = 0$ y se verifica que ν no es múltiplo de la característica del cuerpo ó $\nu = l\,p^m$, siendo $l \neq 1$, $m \geqslant 1$ y p la característica del cuerpo. En este caso la ecuación de f' será de la forma

$$f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) = Z'^{\nu} + \alpha'_r W_1'^{\nu} + \ldots$$

luego su forma inicial no es potencia de una forma lineal y es también posible bajar su multiplicidad mediante una transformación cuadrática formal.

3.er caso. $r = 0$, $d = 0$ y se verifica que $\nu = p^m$. Con esta condición la ecuación de la hipersuperficie será de la forma

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^{\nu} + \varphi_1(W_1, \ldots, W_{n-1}) Z^{\nu-1} + \ldots + \\ + \alpha_r W_1^{r_1} \ldots W_{n-1}^{r_{n-1}} + \ldots = 0, \quad \nu_0(\varphi_i) > i,\ r_1 + \ldots + r_{n-1} = 2\nu.$$

Tendremos que la ecuación de la hipersuperficie transformada mediante la transformación cuadrática de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \qquad \alpha_i \neq 0;\ 1 \leq i \leq n-1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-1} = W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{array}\right.$$

será

$$f'(Z', W'_1, \dots, W'_{n-1}) = Z'^{\nu} + \varphi_1(W'_1, \dots, W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) Z'^{\nu-1} + \\ + \dots + W_1'^{r_1 + \dots + r_{n+1} - \nu} (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{r_2} \dots \\ \dots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{r_{n-1}} + \dots = 0.$$

Si llamamos ν' a la multiplicidad de la hipersuperficie transformada, estudiaremos qué pasa con ν'.

Veremos en primer lugar la trayectoria de los términos de la ecuación

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

que son de la forma

$$d_i Z^{\nu-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}}, d_i \in K, d_i \neq 0, a_1 + \dots + a_{n-1} > i, i \neq 0.$$

$$d_i Z^{\nu-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}} \dots > d_i Z'^{\nu-i} W_1^{a_1 + \dots + a_{n-1} + \nu - i - \nu} \cdot \\ \cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{a_2} \dots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1}} = \\ = d'_i Z'^{\nu-i} W_1'^{a_1 + \dots + a_{n-1} + \nu - i - \nu} + \dots$$

se tiene que

$$\nu' \leq a_1 + \dots + a_{n-1} + \nu - 2i > i + \nu - 2i = \nu - i.$$

Puede ocurrir:

3-1. Existe en la ecuación

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0$$

un término de la forma

$$d_i Z^{\nu-i} W_1^{a_1} \dots W_{n-1}^{a_{n-1}}, \quad d_i \in K, \quad d_i \neq 0$$

tal que

$$a_1 + \dots + a_{n-1} + \nu - 2i < \nu,$$

entonces la multiplicidad bajaría en la primera transformación cuadrática.

3-2. Existe en la ecuación

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

un término de la forma

$$d_i Z^{\nu-i} W_1^{a_1} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1}}, \quad d_i \in K, \quad d_i \neq 0$$

tal que

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} + \nu - 2i = \nu$$

entonces la forma inicial ya no es potencia de una forma lineal y mediante una nueva transformación cuadrática desciende la multiplicidad.

3-3. Todos los términos de la ecuación de la hipersuperficie

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

de la forma

$$d_i Z^{\nu-i} W_1^{a_1} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1}}, \quad i \neq 0, \quad d_i \in K, \quad d_i \neq 0$$

verifican que

$$a_1 + \ldots + a_{n-1} + \nu - 2i > \nu.$$

En este caso consideremos nuevamente la ecuación de la hipersuperficie transformada

$$\begin{aligned} f(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) = Z'^{\nu} + \varphi_1 (W'_1, \ldots, W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) Z'^{\nu-1} + \\ + \ldots + \alpha_r W_1'^{r_1 + \ldots + r_{n-1} - \nu} (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{r_2} \ldots \\ \ldots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{r_{n-1}} + \ldots = 0 \end{aligned}$$

Entonces ν será la multiplicidad de

$$f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}).$$

La forma inicial es de la forma $(Z' + t\, W'_1)^{\nu}$, luego es potencia de una forma lineal. Podemos distinguir a su vez varios subcasos:

3-3-a. Si alguno de los números $r_2, \ldots, r_{n-1}$ no es de la forma $p^{m'}$, entonces existe en el diagrama de Newton de

$$f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1})$$

un punto situado en el eje de abscisas y comprendido entre los puntos $(\nu, 0)$ y $(2\nu, 0)$, luego la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación f' desciende mediante una transformación cuadrática [8, capítulo III].

3-3-b. Si todos los números $r_2, \ldots, r_{n-1}$ son de la forma p^m, la ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) &= Z'^{\nu} + \ldots + c_\nu W_1'^{\nu} \cdot (W_2'^{r_2} + (\alpha_2/\alpha_1)^{r_2}) \ldots \\ &\ldots (W'_{n-1} + (\alpha_{n-1}/\acute{\alpha}_1)^{r_{n-1}}) = Z'^{\nu} + \ldots + \\ &+ c_\nu W_1'^{\nu} W_2'^{r_2} (\alpha_3/\alpha_1)^{r_3} \ldots (\alpha_{n-1}/\alpha_1)^{r_{n-1}} + \ldots \end{aligned}$$

luego en el diagrama de Newton de

$$f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1})$$

se encuentra el punto $(\nu + r_2, 0)$. Puede ocurrir:

3-3-b₁. $r_2 < \nu$, entonces en el diagrama de Newton de

$$f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1})$$

existe un punto de la forma $(q, 0)$ situado entre los puntos $(\nu, 0)$ y $(2\nu, 0)$ y en este caso la multiplicidad de H desciende mediante la aplición de dos transformaciones cuadráticas.

3-3-b₂. $r_2 > \nu$, $r_2 \neq 2\nu$, $r_1 < \nu$. En este caso aplicando a la hipersuperficie H la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = W'_2 Z' \\ W_1 = W'_2 (W'_1 + \alpha_1/\alpha_2) \\ W_2 = W'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-1} = W'_2 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{array} \right.$$

se tiene que en el diagrama de Newton de la hipersuperficie transformada se encuentra el punto $(\nu + r_1, 0)$, luego mediante dos transformaciones cuadráticas desciende la multiplicidad de H.

3-3-b_3. $r_2 = \nu$, $r_1 < \nu$. En esta situación algún r_i; $i = 3, \ldots, n-1$, será menor que ν, sea por ejemplo r_3, entonces en el diagrama de Newton de

$$f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1})$$

se encuentra el punto $(\nu + r_3, 0)$, luego también mediante dos transformaciones cuadráticas desciende la multiplicidad de H.

3-3-b_4. $r_2 = \nu$, $r_1 = \nu$. En este caso la ecuación de la hipersuperficie H será de la forma

$$\begin{gathered} f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^\nu + \varphi_1(W_1, \ldots, W_{n-1}) Z^{\nu-1} + \ldots + \\ + r_a W^\nu_1 W^\nu_2 + \ldots = (Z + r'_a W_1 W_2)^\nu + \varphi_1(W_1, \ldots, W_{n-1}) Z^{\nu-1} + \ldots \end{gathered}$$

pudiendo hacerse el cambio de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} Z' = Z + r'_a W_1 W_2 \\ W'_1 = W_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W'_{n-1} = W_{n-1} \end{array} \right.$$

3-3-c. Si $r_1 = 2\nu$ tendríamos

$$\begin{gathered} f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^\nu + \varphi_1(W_1, \ldots, W_{n-1}) Z^{\nu-1} + \ldots + \\ + r_a W_1^{2\nu} + \ldots = (Z + r'_a W_1^2)^\nu + \varphi_1(W_1, \ldots, W_{n-1}) Z^{\nu-1} + \ldots = 0 \end{gathered}$$

pudiendo hacerse el cambio de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} Z' = Z + r'_a W_1^2 \\ W'_1 = W_1 \\ W'_{n-1} = W_{n-1} \end{array} \right.$$

Luego hemos demostrado en general que si una hipersuperficie no verifica la condición ii) es posible disminuir su multiplicidad mediante dos transformaciones cuadráticas.

Recíprocamente si la hipersuperficie de ecuación

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

verifica las condiciones i), ii) su multiplicidad no disminuye mediante la aplicación de dos transformaciones cuadráticas formales ya que si pudiéramos rebajar la multiplicidad por dos transformaciones cuadráticas tendríamos lo siguiente:

En primer lugar existiría un entero q tal que $0 < q < 2\nu$ y

$$f_{\nu+q}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) \neq 0,$$

ya que si no existiese $f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1})$ sería de la forma

$$\begin{aligned} f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) &= Z^\nu + f_{3\nu}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) + \ldots = \\ &= Z^\nu + \beta\, W_1^{c_1} \ldots W_{n-1}^{c_{n-1}} Z^d + \ldots = 0 \end{aligned}$$

de manera que el grado de todos los términos de f distintos de Z^ν es mayor o igual que 3ν. Así

$$c_1 + \ldots + c_{n-1} + d \geq 3\nu.$$

Aplicando dos veces la transformación cuadrática de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \qquad \alpha_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_{n-1} = W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{array}\right.$$

las ecuaciones de las hipersuperficies transformadas serán

$$\begin{aligned} f'(Z'_1, \ldots, W'_{n-1}) &= Z'^\nu + \beta\, W_1'^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + d - \nu} \cdot \\ &\cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{c_2} \ldots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{c_{n-1}} Z'^d + \ldots = \\ &= Z'^\nu + \beta\, (\alpha_2/\alpha_1)^{c_2} \ldots (\alpha_{n-1}/\alpha_1)^{c_{n-1}} \cdot W_1'^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + d - \nu} \cdot \\ &\cdot Z'^d + \ldots = Z'^\nu + \beta\, W_1'^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + d - \nu} Z'^d + \ldots \end{aligned}$$

con

$$\beta' = \beta\, (\alpha_2/\alpha_1)^{c_2} \ldots (\alpha_{n-1}/\alpha_1)^{c_{n-1}}, \quad \beta' \neq 0$$
$$f''(Z'', W''_1, \ldots, W''_{n-1}) = Z''^\nu + \beta'\, W_1''^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + 2d - 2\nu} Z''^d + \ldots$$

y si ν'' es la multiplicidad de

$$f''(Z'', W''_1, \ldots, W''_{n-1})$$

se tiene que $\nu'' = \nu$ ya que

$$c_1 + \ldots + c_{n-1} + 2d - 2\nu + d \geq 3\nu + 2d - 2\nu = \nu + 2d \geq \nu.$$

Luego $f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1})$ es de la forma

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^\nu + f_{\nu+q}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) + \ldots =$$
$$= Z^\nu + \beta W_1^{c_1} \ldots W_{n-1}^{c_{n-1}} Z^d + \ldots = 0,$$

con

$$\beta \in K, \quad \beta \neq 0, \quad c_1 + \ldots + c_{n-1} + d < 3\nu.$$

Si la hipersuperficie es de esta forma pueden ocurrir dos casos:

a)

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^\nu + \beta W_1^{c_1} \ldots W_{n-1}^{c_{n-1}} Z^d + \ldots$$

con

$$\beta \in K, \quad \beta \neq 0, \quad 2\nu \leq c_1 + \ldots + c_{n-1} + d < 3\nu, c_1 + \ldots + c_{n-1} +$$
$$+ d = 2\nu + q, \quad 0 \leq q < \nu.$$

Si aplicamos dos transformaciones cuadráticas a la hipersuperficie de ecuación

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

obtenemos una hipersuperficie de ecuación

$$f''(Z'', W''_1, \ldots, W''_{n-1}) = Z''^\nu + \beta' W_1''^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + 2d - 2\nu} \cdot Z''^d + \ldots$$

y para que la multiplicidad de esta hipersuperficie sea menor que ν tiene que verificarse

$$c_1 + \ldots + c_{n-1} + 3d - 2\nu < \nu,$$

es decir

$$2\nu + q + 2d - 2\nu < \nu, \; q + 2d < \nu,$$

es decir $2d < \nu - q$, luego

$$2(c_1 + \ldots + c_{n-1}) > 3\nu + 3r$$

luego no se verificaría ii).

b)

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^\nu + \beta W_1^{c_1} \ldots W_{n-1}^{c_{n-1}} Z^d + \ldots,$$

con

$$\beta \in K, \quad \beta \neq 0, \quad \nu < c_1 + \ldots + c_{n-1} + d < 2\nu.$$

Aplicando dos veces la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-1} = W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{array}\right.$$

Las hipersuperficies transformadas tendrán por ecuaciones:

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) &+ Z'^\nu + \beta W_1'^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + d - \nu} \cdot \\ &\cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{c_2} \ldots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{c_{n-1}} Z'^d + \ldots = \\ &= Z'^\nu + \beta (\alpha_2/\alpha_1)^{c_2} \ldots (\alpha_{n-1}/\alpha_1)^{c_{n-1}} \cdot W_1'^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + d - \nu} \cdot \\ &\cdot Z'^d + \ldots = Z'^\nu + \beta W_1'^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + d - \nu} \cdot Z'^d + \ldots = 0, \end{aligned}$$

con $\beta' \neq 0$

$$f''(Z'', W''_1, \ldots, W''_{n-1}) = Z''^\nu + \beta' W_1''^{c_1 + \ldots + c_{n-1} + 2d - 2\nu} \cdot Z''^d + \ldots = 0$$

luego para que la multiplicidad de la hipersuperficie descienda mediante la segunda transformación cuadrática se tiene que verificar que

$$c_1 + \ldots + c_{n-1} + 3d - 2\nu < \nu, \quad 2d < 2\nu - q,$$

es decir

$$2(c_1 + \ldots + c_{n-1}) > 3q$$

y entonces la hipersuperficie no verificaría la condición i).

Teorema 4.—Sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en $K^{n\nu}$ con K cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cualquiera. Sea

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^\nu + f_{\nu+1}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) + \ldots$$

la ecuación de H, es decir la forma inicial es potencia ν-ésima de una forma lineal. En estas condiciones la multiplicidad de la hipersuperficie H no disminuye mediante la aplicación de n transformaciones cuadráticas formales si y sólo si se verifican las condiciones siguientes:

1) $\forall$ entero q_1, $0 < q_1 < \nu$, tal que existe un término de la forma

$$\alpha_{q_1} W_1^{a_{11}} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1,1}} Z^{b_1} \in f_{\nu+q_1}$$

con

$$\alpha_{q_1} \neq 0, \quad \alpha_{q_1} \in K,$$

entonces

$$n(a_{11} + \ldots + a_{n-1,1}) \leq (n+1)\, q_1$$

2) $\forall$ entero q_2, $0 \leqslant q_2 < \nu$, tal que existe un término de la forma

$$\alpha_{q_2} W_1^{a_{12}} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1,2}} Z^{b_2} \in f_{2\nu+q_2}, \quad \alpha_{q_2} \in K, \quad \alpha_{q_2} \neq 0$$

entonces

$$n(a_{12} + \ldots + a_{n-1,2}) \leq [n \cdot 2 - (n-1)]\, \nu + (n+1)\, q_2.$$

$n-1$) $\forall$ entero q_{n-1}, $0 \leqslant q_{n-1} < \nu$, tal que existe un término de la forma

$$\alpha_{q_{n-1}} W_1^{a_{1,n-1}} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1,n-1}} \cdot Z^{b_{n-1}} \in f_{(n-1)\nu+q_{n-1}}, \quad \alpha_{q_{n-1}} \in K, \quad \alpha_{q_{n-1}} \neq 0$$

entonces

$$n(a_{1,n-1} + \ldots + a_{n-1,n-1}) \leq [n(n-1) - 2]\, \nu + (n+1)\, q_{n-1}$$

n) $\forall$ entero q_n, $0 \leqslant q_n < \nu$ tal que existe un término de la forma

$$\alpha_{q_n} W_1^{a_{1n}} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1,n}} \cdot Z^{b_n} \in f_{n\nu+q_n}, \quad \alpha_{q_n} \in K, \quad \alpha_{q_n} \neq 0,$$

entonces

$$n(a_{1n} + \ldots + a_{n-1,n}) \leq (n \cdot n - 1)\, \nu + (n+1) q_n.$$

DEMOSTRACIÓN.—Demostraremos el teorema por inducción. Los lemas 2 y 3 nos dan la demostración para los casos en que $n = 1$, $n = 2$. Supondremos que el teorema es cierto para $n - 1$ y comprobaremos que también es cierto para n.

Si la multiplicidad de la hipersuperficie H no disminuye mediante la aplicación de n transformaciones cuadráticas formales se verifican las condiciones 1, 2, ..., n) ya que si por ejemplo 1) no se verificase, es decir existe q_1, $0 < q_1 < \nu$ con

$$0 \neq f_{\nu+q_1} = \alpha_{q_1} W_1^{a_{11}} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1,1}} Z^{b_1} + \ldots, \quad \alpha_{q_1} \in K, \quad \alpha_{q_1} \neq 0$$

y

$$n(a_{11} + \ldots + a_{n-1,1}) > (n+1) q_1,$$

entonces aplicando una transformación cuadrática formal en el punto

$$(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), \quad \alpha_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-1} = W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{array} \right.$$

la transformada de

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

mediante esta transformación cuadrática tendrá por ecuación

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \ldots W'_{n-1}) &= Z'^{\nu} + \alpha_{q_1} W_1'^{a_{11} + \ldots + a_{n-1,1} + b_1 - \nu} \cdot \\ &\cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{a_{21}} \ldots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1,1}} \cdot Z'^{b_1} + \\ &+ \ldots = Z'^{\nu} + \alpha'_{q_1} \cdot W_1'^{a_{11} + \ldots + a_{n-1,1} + b_1 - \nu} \cdot Z'^{b_1} + \ldots \end{aligned}$$

con

$$\alpha'_{q_1} = \alpha_{q_1} (\alpha_2/\alpha_1)^{a_{21}} \ldots (\alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1,1}}, \; \alpha_{q_1} \neq 0$$

Si

$$a_{11} + \ldots + a_{n-1,1} + b_1 - \nu + b_1 = q_1 + b_1$$

fuera menor que ν ya habría bajado la multiplicidad mediante una transformación cuadrática, si fuera igual a ν la forma inicial ya no sería potencia de una forma lineal con lo cual en dos transformaciones cuadráticas nos bajaría la multiplicidad de f, si fuera mayor que ν entonces $q_1 + b_1 = \nu + h_1$ y se verifica que

$$\begin{aligned}(n-1)(a_{11} + \ldots + a_{n-1,1} + b_1 - \nu) > (n+1)\, q_1 + n\,(b_1 - \nu) - \\ - (a_{11} + \ldots + a_{n-1,1} + b_1 - \nu) = n\,(q_1 + b_1 - \nu) + q_1 - \\ - (a_{11} + \ldots + a_{n-1,1} + b_1 - \nu) = n\, h_1 + q_1 - (\nu + q_1 - \nu) = n\, h_1,\end{aligned}$$

y como el teorema es cierto para $n - 1$ tendremos que aplicando $n - 1$ transformaciones cuadráticas formales a f' nos baja la multiplicidad, luego la multiplicidad de f nos bajará mediante n transformaciones cuadráticas en contradicción con la hipótesis.

Supongamos ahora que la hipersuperficie H no verifica i), es decir existe un entero

$$q_i,\ 0 \leq q_i < \nu,\ 0 \neq f_{i\nu + q_i} = \alpha_i\, W_1^{a_{1i}} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1,i}} Z^{b_i} + \ldots,\quad \alpha_i \in K,\ \alpha_i \neq 0$$
$$n\,(a_{1i} + \ldots + a_{n-1,i}) > [n \cdot i - (n - (i - 1))]\, \nu + (n+1)\, q_i.$$

Aplicando la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-1} = W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{array}\right.$$

la ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$\begin{aligned} f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) = Z'^{\nu} + \alpha_i\, W_1'^{a_{1i} + \ldots + a_{n-1\,i} + b_i - \nu} \cdot \\ \cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{a_{2i}} \ldots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_i)^{a_{n-1,i}} \cdot Z'^{b_i} + \\ + \ldots = Z'^{\nu} + \alpha'_i\, W_1'^{a_{1i} + \ldots + a_{n-1,i} + b_i - \nu} Z'^{b_i} + \ldots \end{aligned}$$

con

$$\alpha'_i = \alpha_i\, (\alpha_2/\alpha_1)^{a_{2i}} \ldots (\alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1,i}},\quad \alpha'_i \neq 0.$$

Se verificará que es posible disminuir la multiplicidad de

$$f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) = 0$$

mediante $n-1$ transformaciones cuadráticas, pues podemos aplicar la hipótesis de inducción ya que al ser

$$a_{1,i} + \ldots + a_{n-1,i} + b_i - \nu + b_i = (i-1)\nu + r \quad \text{con} \quad r = q_i + b_i$$

tendremos que

$$\begin{aligned}(n-1)(a_{1,i} + \ldots + a_{n-1,i} + b_i - \nu) = n(a_{1i} + \ldots + a_{n-1,i}) + \\ + n(b_i - \nu) - (a_{1i} + \ldots + a_{n-1,i} + b_i - \nu) > \\ > [n \cdot i - (n - (i-1)] \nu + (n+1) q_i + n(b_i - \nu) - \\ - (a_{1i} + \ldots + a_{n-1,i} + b_i - \nu) = [n \cdot i - (n - (i-1))] \nu + \\ + (n+1) q_i + n(b_i - \nu) - (i\nu + q_i - \nu) = [(n-1)(i-1) - \\ - [(n-1) - (i-1-1)] \nu + n(q_i + b_i)\end{aligned}$$

luego para bajar la multiplicidad de

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

es necesario solamente aplicar n transformaciones cuadráticas contra la hipótesis.

Supongamos ahora que la hipersuperficie H no verifica n), es decir existe

$$\begin{aligned}q_n, 0 \leq q_n < \nu, 0 \neq f_{n\nu+q_n} = \\ = \alpha_{q_n} W_1^{a_{1n}} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1,n}} Z^{b_n} + \ldots, \quad \alpha_{q_n} \in K, \quad \alpha_{q_n} \neq 0\end{aligned}$$

y

$$n(a_{1n} + \ldots + a_{n-1,n}) > [(n \cdot n) - 1] \nu + (n+1) q_n.$$

Aplicando la transformación cuadrática de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_{n-1} = W'_1 (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1) \end{array}\right. \qquad \alpha_i \neq 0$$

la ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$
\begin{gathered}
f'(Z', W'_1, \ldots, W'_{n-1}) = Z'^{\nu} + \alpha_{q_n} W'^{a_{1n}+\cdots+a_{n-1,n}+b_n-\nu}_1 \cdot \\
\cdot (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1)^{a_{2n}} \ldots (W'_{n-1} + \alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1,n}} \cdot Z'^{b_n} + \\
+ \ldots = Z'^{\nu} + \alpha'_{q_n} W'^{a_{1n}+\cdots+a_{n-1,n}+b_n-\nu}_1 Z'^{b_n} + \ldots, \\
\alpha'_{q_n} = \alpha_{q_n} (\alpha_2/\alpha_1)^{a_{2n}} \ldots (\alpha_{n-1}/\alpha_1)^{a_{n-1,n}}, \quad \alpha'_{q_n} \neq 0
\end{gathered}
$$

Se tiene que

$$
\begin{gathered}
a_{1n} + \ldots + a_{n-1,n} + b_n - \nu + b_n = (n-1)\nu + q_n + b_n = \\
= (n-1)\nu + r, \; r = q_n + b_n.
\end{gathered}
$$

$q_n + b_n < \nu$, pues al ser

$$
\begin{gathered}
n(a_{1n} + \ldots + a_{n-1,n}) + n\, b_n = n(n\nu + q_n) + n\, b_n = \\
= n(n\nu + q_n) - n(a_{1n} + \ldots + a_{n-1,n}) < n(n\nu + q_n) - \\
- n^2\nu + \nu - (n+1)\, q_n = \nu + q_n \\
n(b_n + q_n) < \nu - q_n + n\, q_n = (n-1)\, q_n + \nu < n\nu \ldots > b_n + q_n < \nu,
\end{gathered}
$$

Podemos aplicar la hipótesis de inducción igual que en los casos a) y b) ya que

$$
\begin{gathered}
(n-1)(a_{1n} + \ldots + a_{n-1,n} + b_n - \nu) = n(a_{1n} + \ldots + a_{n-1,n}) + \\
+ n(b_n - \nu) - (a_{1n} + \ldots + a_{n-1,n} + b_n - \nu) > (n^2 - 1)\nu + \\
+ (n-1)\, q_n + n(b_n - \nu) - (a_{1n} + \ldots + a_{n-1,n} + b_n - \nu) = \\
= (n^2 - 1)\nu + (n+1)\, q_n + n(b_n - \nu) - (n\nu + q_n - \nu) = \\
= n(q_n + b_n) + [(n-1)(n-1) - 1]\,\nu.
\end{gathered}
$$

Luego para bajar la multiplicidad de la hipersuperficie de ecuación

$$
f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0
$$

solamente es necesario aplicar n transformaciones cuadráticas contra la hipótesis.

Recíprocamente si la hipersuperficie H verifica las condiciones 1), 2), ..., n) es imposible bajar su multiplicidad mediante n transformaciones cuadráticas. Se demuestra mediante un proceso análogo al del lema 3.

Se demostrará ahora un teorema en el que las n condiciones del teorema 4 se reducen a una sola.

Teorema 5.—Sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n con K cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cualquiera. Sea

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0 = Z^{\nu} + f_{\nu+1}(Z, W_1 \ldots, W_{n-1}) + \ldots$$

la ecuación de H, es decir la forma inicial es potencia ν-ésima de una forma lineal. En estas condiciones la multiplicidad de la hipersuperficie H no disminuye mediante la aplicación de n transformaciones cuadráticas formales si y sólo si se verifica la siguiente condición:

$\forall$ entero q, $0 < q < n\,\nu$ tal que existe un término de la forma

$$\alpha_q W_1^{a_1} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1}} Z^b \in f_{\nu+q}$$

con $\alpha_q \in K$, $\alpha_q \neq 0$, entonces

$$n(a_1 + \ldots + a_{n-1}) \leq (n+1)\,q.$$

Demostración.—El teorema 4 nos dice que la multiplicidad de la hipersuperficie H no disminuye mediante la aplicación de n transformaciones cuadráticas formales si y sólo si se verifica:

$$\forall\, q_i, \quad 1 \leq i \leq n; \quad 0 < q_1 < \nu; \quad 0 \leq q_j < \nu, \quad i = 2 \ldots n,$$

tal que existe un término de la forma

$$\alpha_{q_i} W_1^{a_1} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1}} Z^b \in f_{i\nu+q_i}$$

con $\alpha_{q_i} \in K$, $\alpha_{q_i} \neq 0$ y

$$\begin{aligned} n(a_1 + \ldots + a_{n-1}) &\leq [n\,i - (n - i+1)]\,\nu + (n+1)\,q_i = \\ &= [(n+1)(i-1)]\,\nu + (n+1)\,q_i = n+1\,((i-1)\,\nu + q_i) \end{aligned}$$

llamando $q = (i-1)\,\nu + q_i$, se tiene

$$n(a_1 + \ldots + a_{n-1}) \leq (n+1)\,q$$

quedando demostrado el teorema 5.

En lo que sigue se verá la relación entre el diagrama de Newton de la hipersuperficie de ecuación

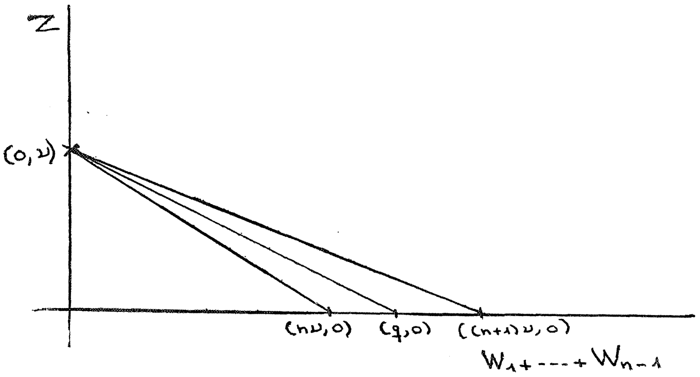
$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

y el número necesario de transformaciones cuadráticas para que baje su multiplicidad.

TEOREMA 6.—Sea H una hipersuperficie sumergida en K^n siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cualquiera. Sea

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^\nu + f_{\nu+1}(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) + \ldots$$

la ecuación de H. En estas condiciones se yerifica que: La condición necesaria y suficiente para que la multiplicidad de la hipersuperficie H pueda disminuir mediante la aplicación de n transformaciones cuadráticas, pero no mediante la aplicación de $n - 1$ es que el primer segmento del diagrama de Newton se encuentre situado en la recta de ecuación $\nu x + q y = \nu q$, siendo $n \nu \leqslant q < (n + 1) \nu$.



DEMOSTRACIÓN.—Sea $f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$ la ecuación de una hipersuperficie cuya multiplicidad disminuye mediante la aplicación de n transformaciones cuadráticas pero no mediante la aplicación de $n - 1$. Sean

$$c_{q_r} W_1^{a_{1r}} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1,r}} Z^{b_r}$$

los monomios integrantes de

$$f_{r\nu+q_r}, 1 \leq r \leq n,$$

al no descender la multiplicidad mediante $n-1$ transformaciones cuadráticas se tiene que

$$(n-1)(a_{1r}+\ldots+a_{n-1,r}) \leq [(n-1)r-(n-1-r+1)]\nu +$$
$$+(n-1+1)q_r = n(r\nu+q_r)-n\nu = n(a_{1r}+\ldots+a_{n-1,r}+b_r)-n\nu,$$

luego

$$(a_{1r}+\ldots+a_{n-1,r})+n\,b_r-n\,\nu \geq 0,$$

es decir, los puntos del diagrama de Newton de la hipersuperficie se encuentran en la recta o por encima de la recta de ecuación $x+n\,y=n\,\nu$.

Ahora al descender la multiplicidad de

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

mediante n transformaciones cuadráticas existe un entero s tal que

$$0 \neq f_{s\nu+q_s} = \alpha_{q_s} W_1^{a_{1s}} \ldots W_{n-1}^{a_{n-1,s}} Z^{b_s} + \ldots, \quad \alpha_{q_s} \in K, \quad \alpha_{q_s} \neq 0$$

y

$$n(a_{1s}+\ldots+a_{n-1,s}) > [n\,s-(n-(s-1))]\nu+(n+1)q_s =$$
$$=(n+1)(s\nu+q_s)-(n+1)\nu = (n+1)(a_{1s}+\ldots+$$
$$+a_{n-1,s}+b_s)-(n+1)\nu$$
$$(a_{1s}+\ldots+a_{n-1,s})+(n+1)b_s-(n+1)\nu < 0$$

es decir, existe un punto debajo de la recta de ecuación

$$x+(n+1)y=(n+1)\nu$$

luego el primer segmento del diagrama de Newton está en la recta $\nu\,x+q\,y=\nu\,q$, siendo $n\,\nu \leqslant q < (n+1)\,\nu$.

Recíprocamente supongamos que el primer segmento del diagrama de Newton de la hipersuperficie de ecuación

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0$$

se encuentra situado en una recta de ecuación

$$\nu x + q y = \nu q \quad \text{con} \quad n \nu \leq q < (n+1) \nu.$$

Entonces todos los puntos del diagrama de Newton de la hipersuperficie se encuentran en la recta o encima de la recta de ecuación $x + n y = n \nu$, luego si

$$c_{q_r} W_1^{a_{1r}} \dots W_{n-1}^{a_{n-1,r}} Z^{b_r}$$

es un término cualquiera de

$$f(Z, W_1, \dots, W_{n-1}) = 0, \quad c_{q_r} \in K, \quad c_{q_r} \neq 0, \quad a_{1r} + \dots + a_{n-1,r} + b_r = r \nu + q_r$$

se verifica

$$(a_{1r} + \dots + a_{n-1,r}) + n b_r \geq n \nu,$$

ahora

$$n b_r = n (r \nu + q_r) - n (a_{1r} + \dots + a_{n-1,r})$$

luego

$$(a_{1r} + \dots + a_{n-1,r}) + n (r \nu + q_r) - n (a_{1r} + \dots + a_{n-1,r}) \geq n \nu$$

es decir

$$(n-1)(a_{1r} + \dots + a_{n-1,r}) \leq (n r - n) \nu + n q_r,$$

lo que quiere decir que por $n - 1$ transformaciones cuadráticas es imposible bajar la multiplicidad de la hipersuperficie.

Al existir por lo menos un punto en el diagrama de Newton de la hipersuperficie debajo de la recta de ecuación

$$x + (n+1) y = (n+1) \nu,$$

existirá en la ecuación de la hipersuperficie un término de la forma

$$\alpha_{q_s} W_1^{a_{1s}} \dots W_{n-1}^{a_{n-1,s}} \cdot Z^{b_s} \in f_{s\nu + q_s}, \quad \alpha_{q_s} \in K, \quad \alpha_{q_s} \neq 0$$

con

$$(a_{1s} + \ldots + a_{n-1,s}) + (n+1)\, b_s < (n+1)\, \nu,$$

como

$$(n+1)\, b_s = (n+1)(s\,\nu + q_s) - (n+1)(a_{1s} + \ldots + a_{n-1,s})$$

se tendrá

$$(a_{1s} + \ldots + a_{n-1,s}) + (n+1)(s\,\nu + q_s) - (n+1)(a_{1s} + \ldots + a_{n-1,s}) < \\ < (n+1)\,\nu$$

es decir

$$n\,(a_{1s} + \ldots + a_{n-1,s}) > [n\,s - (n - (s-1))]\,\nu + (n+1)\, q_s$$

luego es posible bajar la multiplicidad de la hipersuperficie mediante n transformaciones cuadráticas.

Un corolario trivial del teorema 6 es el siguiente teorema:

TEOREMA 7. TEOREMA DEL CAMINO MÍNIMO.—Sea H una hipersuperficie algebroide sumergida en K^n siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cualquiera. Sea

$$f(Z, W_1, \ldots, W_{n-1}) = Z^\nu + \varphi_1 (W_1, \ldots, W_{n-1})\, Z^{\nu-1} + \ldots + \\ + \varphi_{\nu-1} (W_1, \ldots, W_{n-1})\, Z + \varphi_\nu (W_1, \ldots, W_{n-1}) = 0, \\ \nu_0 (\varphi_i (W_1, \ldots, W_{n-1})) \geq i$$

una ecuación de la hipersuperficie H cuya forma inicial es potencia de una forma lineal. Se verifica entonces que el mínimo número de transformaciones cuadráticas que hay que aplicar a H para disminuir su multiplicidad es igual a la parte entera del primer exponente característico del diagrama de Newton de H.

DEMOSTRACIÓN.—Se demuestra trivialmente teniendo en cuenta el teorema anterior y que el primer segmento del diagrama de Newton se encuentra situado en la recta r_{δ_1} de ecuación

$$(1/\delta_1)\, x + y = \nu$$

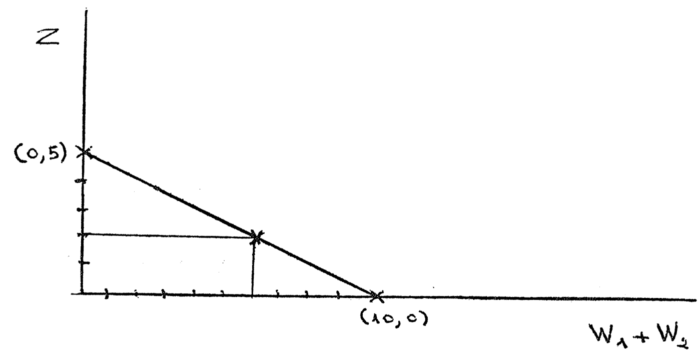
con δ_1 el primer exponente característico (véase nota 1, ii).

NOTA 8.—EJEMPLOS.

1) Sea H la hipersuperficie sumergida en K^5 siendo K un cuerpo de característica 5 de ecuación

$$Z^5 + W^3_1 W^3_2 Z^2 + W^7_1 W^3_2 = 0$$

cuyo diagrama de Newton es



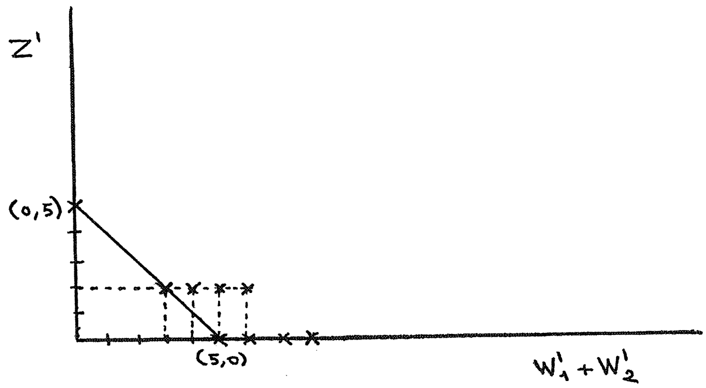
Aplicando la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$\begin{cases} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha/\beta) \end{cases}$$

se nos transformará en una hipersuperficie de ecuación

$$\begin{aligned} & Z'^5 + Z'^2 W_1'^3 (W_2' + \alpha/\beta)^3 + W_1'^5 (W_2' + \alpha/\beta)^3 = 0 \\ & Z'^5 + Z'^2 W_1'^3 (W_2'^3 + c_1 W_2'^2 + c_2 W_2' + c_3) + \\ & + W_1'^5 (W_2'^3 + d_1 W_2'^2 + d_2 W_2' + d_3) = 0 \\ & (Z' + e_1 W_1')^5 + Z'^2 W_1'^3 W_2'^3 + c_1 Z'^2 W_1'^3 W_2'^2 + \\ & + c_2 Z'^2 W_1'^3 W_2' + c_3 Z'^2 W_1'^3 + W_1'^5 W_2'^3 + d_1 W_1'^5 W_2'^2 + \\ & + d_2 W_1'^5 W_2' = 0 \end{aligned}$$

cuyo diagrama de Newton será

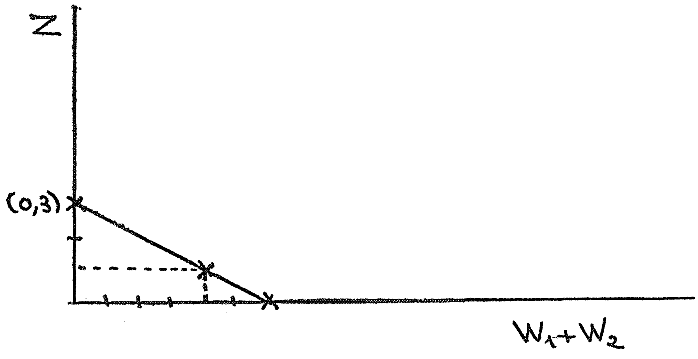


luego en otra transformación cuadrática formal desciende la multiplicidad, es decir se necesitan dos transformaciones cuadráticas para bajar la multiplicidad de H. Se comprueba fácilmente que este ejemplo es un caso particular de 3-2 (véase lema 3).

2) Sea H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^3 siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 3 de ecuación

$$Z^3 + Z W_2^4 + Z W_1 W_2^3 + W_2^6 - W_1 W_2^5 = 0$$

cuyo diagrama de Newton es



Aplicando la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$\begin{cases} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \end{cases}$$

se nos transformará en una hipersuperficie de ecuación

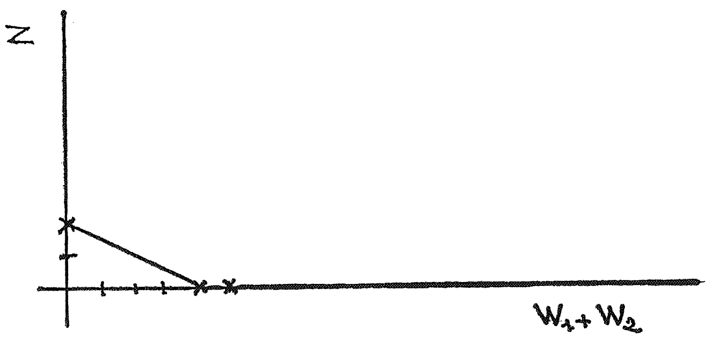
$$\begin{gathered} Z'^3 + Z' W_1'^2 (W_2' + \alpha_2/\alpha_1)^4 + Z' W_1'^2 (W_2' + \alpha_2/\alpha_1)^3 + \\ + W_1'^3 (W_2' + \alpha_2/\alpha_1)^6 - W_1'^3 (W_2' + \alpha_2/\alpha_1)^5 = \\ = (Z' + c_1 W_1')^3 + c_2 Z' W_1'^2 + \ldots = 0 \end{gathered}$$

cuya forma inicial ya no es potencia de una forma lineal, luego la multiplicidad de la hipersuperficie H desciende mediante dos transformaciones cuadráticas. Se comprueba fácilmente que este ejemplo es un caso particular de 3-2 (véase lema 3).

3) Sea H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^2 siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 2 de ecuación

$$Z^2 - W_1^5 - W_2^3 W_1 = 0$$

cuyo diagrama de Newton es



Aplicando la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$\begin{cases} Z = Z' W'_1 \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \beta/\alpha) \end{cases}$$

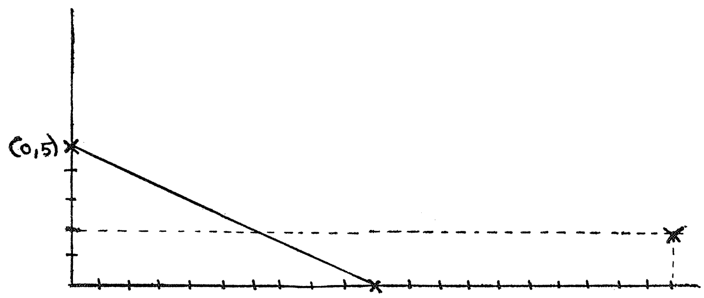
se nos transformará en una hipersuperficie de ecuación

$$Z'^2 - W_1'^3 - W_1'^2 (W_2' + \beta/\alpha)^3 = (Z' + c_1 W_1')^2 + \ldots = 0$$

y mediante otra transformación cuadrática desciende la multiplicidad de H. Se comprueba fácilmente que este ejemplo es un caso particular de 3-3-a (véase lema 3).

4) Sea H la hipersuperficie algebroide sumergida en K^5 siendo K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 5 de ecuación

$$Z^5 + W_1{}^5 W_2{}^5 + W_1{}^{20} Z^2 = 0.$$



Aplicando la transformación cuadrática formal de ecuaciones

$$\begin{cases} Z = W'_1 Z' \\ W_1 = W'_1 \\ W_2 = W'_1 (W'_2 + \alpha_2/\alpha_1) \end{cases}$$

la ecuación de la hipersuperficie transformada será

$$\begin{aligned} &Z'^5 + W_1'^5 W_2'^5 + (\alpha_2/\alpha_1)^5 W_1'^5 + W_1'^{17} Z'^2 = \\ &= (Z' + (\alpha_2/\alpha_1) W_1')^5 + W_1'^5 W_2'^5 + W_1'^{17} Z'^2 = 0 \end{aligned}$$

Mediante un cambio de variables se transformará en

$$Z^5 + W_1{}^5 W_2{}^5 + W_1{}^{17} (Z - (\alpha_2/\alpha_1) W_1)^2 = 0$$

Aplicando el mismo proceso anterior obtendremos las hipersuperficies

$$Z^5 + W_1^5 W_2^5 + W_1^{14} Z^2 + \ldots = 0$$
$$Z^5 + W_1^5 W_2^5 + W_1^{11} Z^2 + \ldots = 0$$
$$Z^5 + W_1^5 W_2^5 + W_1^8 Z^2 + \ldots = 0$$
$$Z^5 + W_1^5 W_2^5 + W_1^5 Z^2 + \ldots = 0$$
$$Z^5 + W_1^5 W_2^5 + W_1^2 Z^2 + \ldots = 0$$

luego hemos necesitado aplicar seis transformaciones cuadráticas formales para que descienda la multiplicidad de H. Efectivamente la parte entera del primer exponente característico del diagrama de Newton de H es seis.

Bibliografía

[1] Aroca, J. M.; Hironaka, H.; Vicente, J. L.: *The theory of the maximal contact.* Memorias de Matemática del Instituto «Jorge Juan», C. S. I. C. Madrid, 1975.

[2] Bennett, B. M.: *On the characteristic functions of a local ring.* «Ann. Math.», 91, 1970.

[3] Giraud, J.: *Sur le contact maximal en caracteristique* p. Preprint Ecole Normale Super. St. Cloud, 1974.

[4] Hironaka, H.: *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero.* «Annals of Math.», 79, 1964.

[5] Hironaka, H.: *Characteristic polyedra of singularities.* «Journal of Math. of Kyoto University», vol. 7, núm. 3, 1968.

[6] Lejeune-Jalabert, M.; Teissier, B.: *Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités.* Ecole Polytechnique. París, 1972.

[7] Lipman, J.: *Quasi-Ordinary singularities of embedded surfaces.* Tesis de Harvard.

[8] Romo, C.: *Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera.* Monografías y Memorias de Matemática. X. Instituto «Jorge Juan», C. S. I. C. Madrid, 1976.

[9] — — *Número de transformaciones cuadráticas formales necesarias para que descienda la multiplicidad de una hipersuperficie algebroide definida sobre un cuerpo de característica cualquiera.* «Actas de la XII Reunión Anual de Matemáticos Españoles». Málaga, 1976.

[10] — — *Una caracterización del contacto maximal en hipersuperficies algebroides.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, tomo XXXVI, núms. 5-6. Madrid, 1976.

[11] — — *Contacto maximal en característica positiva.* «Actas de las IV Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas». Jaca, 1977.

[12] — — *Resolución de singularidades de variedades algebroides mediante transformaciones cuadráticas*. «Actas de la IV Reunión de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina». Madrid, 1977.

[13] SÁNCHEZ GIRALDA, T.: *Teoría de singularidades de superficies algebroides sumergidas*. Memorias y Monografías del Instituto «Jorge Juan», IX, C. S. I. C. Madrid, 1976.